УДК 539.0

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ КРИТЕРИИ СТРАГИВАНИЯ ПЛОСКОЙ КРУГЛОЙ ТРЕЩИНЫ

Ю.Г.Пронина
Санкт-Петербургский государственный университет

Решение сложных вопросов прочности машин и сооружений, разнообразных технологических проблем, задач горной механики, геофизики и многих других невозможно без знания закономерностей процессов разрушения. Одним из главных направлений в этой области является исследование процессов развития внутренних дефектов материала. Эксперименты показали, что разрушение начинается, как правило, либо с поверхности, либо из приповерхностной зоны, поэтому большой практический интерес представляет проблема роста прриповерхностных трещин.

Рассмотрим упругое однородное и изотропное полупространство $S^- + \Gamma \;\; (z \le h/2)$ с плоской круглой трещиной γ радиуса R, параллельной поверхности тела. Пусть на $\Gamma = \{z \le h/2\}$ и $\gamma = \{(r,\phi,z): 0 \le r \le R, 0 \le \phi < 2\pi, z = -h/2\}$ действуют известные статические нагрузки. Как показывают эксперименты, при определенной величине этих нагрузок трещина начинает развиваться в своей плоскости. Если радиус трещины много меньше расстояния h между трещиной и границей полупространства, то часть $C \in S^-$, расположенную между γ и Γ, можно считать тонкой пластинкой постоянной толщины h, загруженной внешней нагрузкой $q = q(r,\phi)$ и соответствующим образом закрепленной по контуру [1]. Согласно теории изгиба пластин [2] на контуре изогнутой срединной плоскости пластины $w_0(r,\phi)$ действуют изгибающие моменты $M_r^R = M_r^R(q,r,\phi), M_t^R = M_t^R(q,r,\phi)$ и перерезывающая сила $Q^R = Q^R(q,r,\phi)$. Рассмотрим осесимметричную задачу, тогда прогиб срединной плоскости пластинки C и нагрузка будут функциями только переменной r. Предположим, что под действием внешней нагрузки произошло локальное разрушение материала в окрестности контура трещины, вызвавшее увеличение радиуса трещины на малую величину dR. При этом изгибающие моменты и перерезывающая сила совершают работу

$$dA = 2\pi\{M_r^R[w_*''(R) - w_0''(R)] + M_t^R \frac{1}{R}[w_*'(R) - w_0'(R)] + Q^R w_*(R)\}.$$

Здесь $w_0(r), w_*(r)$ - прогиб срединной плоскости пластины до и после приращения ее радиуса соответственно, $w_*'(r) = \dfrac{dw_*(r)}{dr}, w_0'(r) = \dfrac{dw_0(r)}{dr}$. Раскладывая $w_*(R), w_*'(R), w_*''(R)$ в ряды Тейлора в окрестности величины нового радиуса $R_* = R + dR$ трещины с точностью до величин второго порядка малости, будем иметь

$$dA = 2\pi\{M_r^R[w_*''(R_*) + w_*'''(R_*)dR - w_0''(R)] + M_t^R \frac{1}{R}[w_*'(R_*) + w_*''(R_*)dR - w_0'(R)] +$$
$$+ Q^R[w_*(R_*) + w_*'(R_*)dR]\}.$$

Будем считать, что изменение кривизн у края трещины при ее увеличении, когда $dR << R$, незначительно, и им можно пренебречь, то есть положить

$w_*'(R_*) \approx w_0'(R), w_*''(R_*) \approx w_0''(R).$ Тогда с учетом того, что $w_*(R_*) \equiv 0,$ последнее соотношение перепишем в виде

$$dA = 2\pi\{M_r^R w_0'''(R) + M_t^R \frac{1}{R} w_0''(R) + Q^R w_0'(R)\} dR . \qquad (1)$$

В результате этой работы появляются две новые поверхности площадью $2\pi(R + 0.5dR)dR \approx 2\pi RdR$ каждая. В соответствие с теорией Гриффитса [3] для продвижения трещины, влекущего образование новой поверхности, необходимо преодолеть энергетический барьер, определяемый поверхностной энергией материала. Следовательно критерий разрушения можно записать в виде:

$$dA = \gamma_{ef}\, 2\pi RdR .$$

Здесь $\gamma_{ef} = \gamma_p + 2\gamma_c$ - эффективная работа, состоящая из работы пластической деформации и удвоенной величины поверхностной энергии материала полупространства. Внося сюда выражение (1) и сокращая на $2\pi dR$, приходим к следующему результату

$$\gamma_{ef} = \frac{1}{R}\{M_r^R w_0'''(R) + M_t^R \frac{1}{R} w_0''(R) + Q^R w_0'(R)\} . \qquad (2)$$

Граничные моменты, перерезывающая сила и прогиб вычисляются отдельно для конкретной внешней нагрузки и принимаемых, в зависимости от упругих свойств материала, граничных условий.

Полученная формула позволяет учесть влияние внешней среды на несущую способность квазихрупких тел с приповерхностными трещинами [4]. Значения γ_p и γ_c для различных материалов известны, они определяются экспериментально [5,6]. Поэтому с помощью формулы (2) можно вычислить величины предельных нагрузок, при которых начинается рост трещины.

Пример. Рассмотрим чисто упругую постановку задачи. В этом случае в качестве граничных условий следует принять жесткое защемление: $w_0(R) = 0, w_0'(R) = 0.$ Тогда последнее слагаемое в формуле (2) будет отсутствовать, откуда следует, что в чисто упругой модели перерезывающая сила Q^R не оказывает влияния на продвижение трещины. Кроме того, для упругого материала $\gamma_p = 0,$ поэтому формула (2) преобразуется к виду

$$\gamma_c = \frac{1}{2R}\{M_r^R w_0'''(R) + M_t^R \frac{1}{R} w_0''(R)\} . \qquad (3)$$

Рассмотрим задачу, когда в полости трещины действует равномерное давление интенсивности $q = const$. В этом случае, согласно [2], имеем

$$w_0 = \frac{q}{64D}(R^2 - r^2)^2, M_r^R = \frac{qR^2}{8}, M_t^R = \frac{\nu q R^2}{8}.$$

Подставляя это решение в соотношение (3), получим

$$\gamma_c = \frac{q^2 R^2 (3+\nu)}{128D}.$$

Отсюда величина критической нагрузки, при которой происходит страгивание трещины, определяется по формуле:

$$q_{cr} = \frac{8}{R}\sqrt{\frac{2\gamma_c D}{3+\nu}}.$$

Если в центре пластинки C действует сосредоточенная сила P, имеем [2]

$$w_0 = \frac{P}{4\pi D}\{r^2 \ln\frac{r}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\}, M_r^R = \frac{P}{4\pi}, M_t^R = \frac{P\nu}{4\pi}.$$

Критерий разрушения в этом случае запишется в виде:

$$\gamma_c = \frac{P^2(1+\nu)}{32D(\pi R)^2}$$

и, следовательно, критическая величина сосредоточенной силы может быть вычислена по формуле

$$P_{cr} = 4\pi R\sqrt{\frac{2\gamma_c D}{1+\nu}}.$$

В случае пластичного материала в качестве краевых условий следует брать упругую заделку или шарнир.

Работа написана при поддержке научной школы «Нелинейная механика и физика твердого деформируемого тела» (N 96-15-96066, руководитель - К.Ф.Черных), гранта РФФИ (N 99-01-00673) и гранта Министерства общего и профессионального образования 1997г. в области естествознания СПбГУ.

Список литературы.

1. Пронина Ю.Г. Об энергетическом критерии роста приповерхностных трещин.//Сб.Современные вопросы физики и механики материалов. СПб, 1997, с.47-53.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М: Наука, 1966, 636 с.
3. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. Philos. Tranc. Roy. Soc., 1920, A221, p.163-198.
4. Даль Ю.М. Прочность материалов в агрессивных средах. Труды 13 международной школы по механике сплошных сред. Изд-во СпбГУ, 1995, с.55-65.
5. Кузнецов В.Д. Поверхностная энергия твердых тел. М.: гос.изд-во технико-теоретической лит-ры, 1954, 220 с.
6. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения: Пер. С японск. –М.: Мир, 1986, 334 с.